Aksiome podudarnosti

Postoji pet aksioma podudarnosti (tri aksiome podudarnosti za duži + dvije aksiome podudarnosti za uglove)

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i za svaku duž AB, postoji tačka $B' \in A'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, što zapisujemo ovako $AB \cong A'B'$.

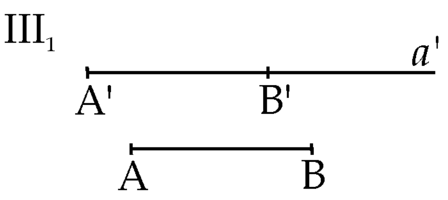
III_2 Ako je $A'B' \cong AB$ i $A''B'' \cong AB$ tada je $A'B' \cong A''B''$.

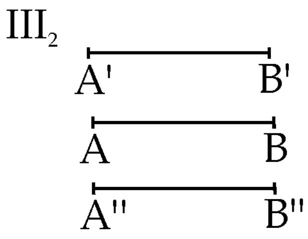
III_3 Ako je $A - B - C$ i $A' - B' - C'$ i ako je $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$ tada je $AC \cong A'C'$.

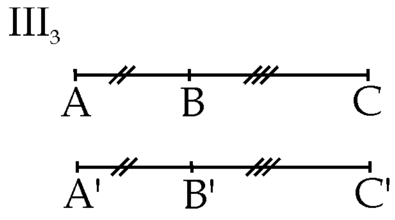
III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom u pravoj p', za svaku polupravu $a' \subseteq p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao $\measuredangle ab$, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subseteq \alpha'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao $\measuredangle ab$ podudaran sa uglom $\measuredangle a'b'$, što zapisujemo $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$.

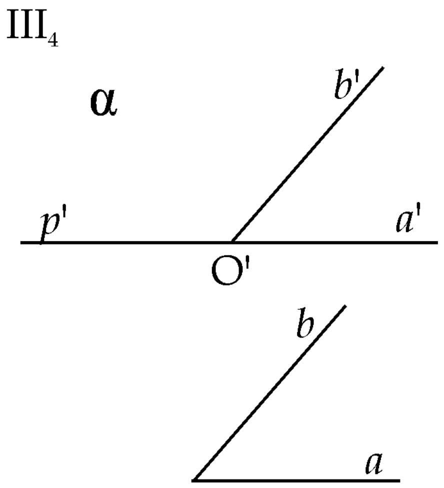
III_5 Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važi da je $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ tada je i $\measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A'$.

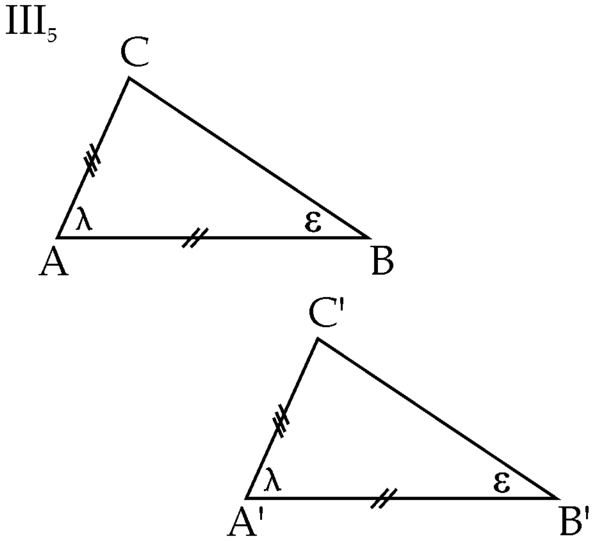
Skraćeno, aksiome podudarnosti predstavljene slikama:











Sljedeće teoreme su dokazane na predavanjima i mi ćemo ih samo navesti.
Teoreme o podudarnosti trouglova:

1.

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong A'B' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AC \cong A'C' \end{array}\right\} \overset{\text{SUS}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

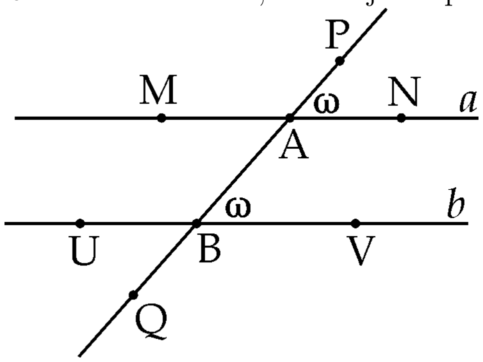
2.
$$\left.\begin{array}{c}\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AB \cong A'B' \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'\end{array}\right\} \overset{\text{USU}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

3.
$$\left.\begin{array}{c}AB \cong A'B' \\ AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C'\end{array}\right\} \overset{\text{SSS}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

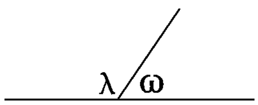
4.
$$\left.\begin{array}{c}\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' \\ AB \cong A'B'\end{array}\right\} \overset{\text{UUS}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

5.
$$\left.\begin{array}{c}AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C' \\ AC > BC\end{array}\right\} \overset{\substack{\text{SSU} \\ \text{(ugao nasprem veće stranice)}}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

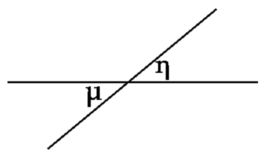
U nekim zadacima, od broja 12 pa nadalje, ćemo pretpostaviti da vrijedi sljedeća teorema:



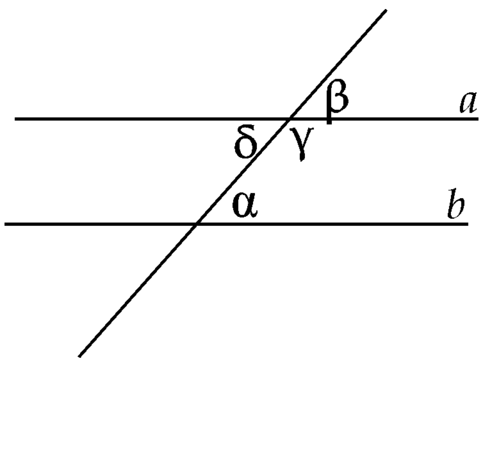
$\measuredangle PAN = \measuredangle ABV = \omega$ ako i samo ako $a \| b$
($p(P, Q)$ transferzala ili presječnica)



λ i ω su naporedni uglovi



η i μ su unakrsni ugolovi



α i β su saglasni uglovi
α i γ su suprotni uglovi
α i δ su naizmjenični uglovi

Urađeni zadaci

1. Vanjski (spoljašnji) ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Dokazati.

2. Najviše jedan ugao u trouglu može biti prav ili tup, a najmanje dva su oštra. Dokazati.

3. Nasuprot većeg ugla u trouglu leži veća stranica. Dokazati.

4. Neka je $\measuredangle aOb$ prav ugao (a i b su poluprave sa početnom tačkom O) i neka su tačke $A \in a$ i B, $C \in b$. Dokazati da je $OC > OB$ ako i samo ako je $AC > AB$.

5. Dokazati da je ortogonalna projekcija tačke koja pripada jednom kraku oštrog ugla na pravu određenu drugim krakom pripada tom, drugom kraku. Formuliati i dokazati odgovarajuću teoremu za tup ugao.

6. Neka je AA_1 težišna linija $\triangle ABC$. Dokazati da je ugao $\measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$ ako i samo ako je $AB < AC$.

7. Neka je A_1 sredina stranice BC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da vrijedi:
   a) $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$
   b) $AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC)$
   c) zbir težišnih linija trougla je veći od poluobima a manji od obima trougla.

8. Neka je M tačka u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$. Dokazati da vrijedi:
   a) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$
   b) $MA + MB < AC + CB$

9. Neka je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na pravu određenu tačkama A i B. Dokazati da je $MA \geq MB$ ako i samo ako je $MA_1 \geq M_1B$.

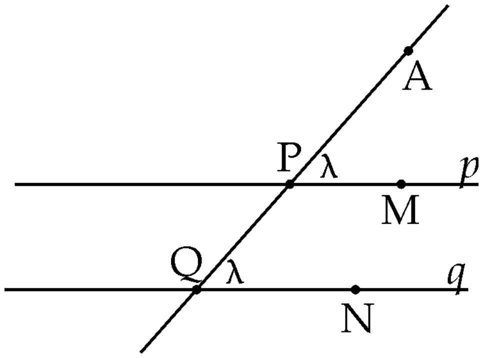
10. Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ vrijedi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$. Dokazati da je $BC \geq B_1C_1$ ako i samo ako je $\measuredangle BAC \geq \measuredangle B_1A_1C_1$.

11. U trouglu ABC je $AB < AC$. Neka su E, D i H redom tačke u kojima simetrala ugla, težišna linija i visina iz tjemena A sijeku prave BC. Dokazati da vrijedi
    a)$\measuredangle AEB < \measuredangle AEC$
    b)$BE < CE$
    c) da je poredak $H - E - D$.

12. Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da trougao bude jednakokraki
    a) da su dvije visine podudarne
    b) da je jedna simetrala ugla ujedno i težišnica
    c) da su mu dvije težišne linije podudarne.

13. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$, AB je najveća, a CD najmanja stranica. Dokazati da je $\measuredangle D > \measuredangle B$ i $\measuredangle C > \measuredangle A$.

Pretpostavimo da je dokazana teorema o ugovima na transferzali koja glasi:



$\measuredangle APM = \measuredangle AQN = \lambda$ ako i samo ako $p \| q$

Pomoću ove teoreme možemo uraditi zadatak broj 1 i na drugi način.

14. Vanjski (spoljašnji) ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Zbir uglova u trouglu je ravan ugao. Dokazati.

15. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle A = \measuredangle B$ i $BC > AD$. Dokazati da je $\measuredangle C < \measuredangle D$.

16. U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q n CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60^\circ$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Odrediti ostale uglove u $\triangle ABC$.

17. Dokazati da je u svakom konveksnom četverouglu bar jedna stranica manja od veće dijagonale.

18. Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

19. Između svih trouglova sa datim zbirom težišnih linija odrediti onaj sa najvećim zbirom visina.

20. Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

Problemi broj 3

Zadaci za vježbu

21. U trouglu su povučene simetrala ugla i težišna linija iz tjemena koje je incidentno sa dvije nejednake stranice trougla. Dokazati da je odsječak simetrale ugla koji leži između tjemena i naspremne stranice manji od težišne linije.

22. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $AD \cong BC$ i $\measuredangle DAB > \measuredangle ABC$. Dokazati da je i $\measuredangle BCD > CDA$.

23. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle D$. Dokazati da je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

24. Dokazati da je zbir dijagonala konveksnog četverougla veći od poluobima, a manji od obima četverougla.

25. Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti trougla ABC, tada je obim trougla $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

26. Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

27. Dokazati da konveksan četverougao $\square ABCD$ tangentan ako i samo ako je se kružnice upisane u trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ dodiruju.

    Napomena: Četverougao je tangentan ako i samo ako se u njega može upisati kružnica.

28. Kod tangentnog četverougla sredina jedne dijagonale pripada drugoj dijagonali. Dokazati da je taj četverougao deltoid.

    Napomena: Deltoid je konveksan četverougao u kojem iz dva dijagonalna tjemena izlaze po dvije međusobno podudarne stranice.

29. Ako postoji kružnica koja na svim stranicama četverougla $\square ABCD$ odsjeca međusobno podudarne duži, tada je $AB + CD \cong AD + BC$. Dokazati.

30. U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $AC + CD \geq AB + BD$. Dokazati da je AB<AC. Da li tvrđenje važi za nekonveksne četverouglove?

31. Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ simetrala stranice AB je istovremenao i simetrala stranice CD.

    Napomena: Konveksan četverougao $\square ABCD$ kod kojeg su uglovi kod tjemena A i D pravi, a stranice AD i BC međusobno podudarne, zove se Sakerijev.

32. Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.

33. Dakazati da u Sakerijevom četverouglu $\square ABCD$ je $AB \leq CD$.

34. Neka su A_1 i B_1 redom sredine stranica BC i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je $A_1B_1 \leq \frac{1}{2}AB$.

35. Neka su A_1 i B_1 redom sredine stranica BC i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da prava A_1B_1 je normalna na simetralu stranice AB.

36. Neka su A_1 i B_1 redom sredine stranica BC i AC trougla $\triangle ABC$. Dokazati da prava A_1B_1 ne siječe pravu AB.

37. Neka je C' podnožje visine iz tjemena C pravouglog trougla $\triangle ABC$ sa pravim uglom kod tjemena C. Dokazati da je $\measuredangle ACC' \leq \measuredangle ABC$

38. Dokazati da je u pravouglom trouglu $\triangle ABC$, $SC \leq \frac{1}{2}AB$, gdje je S-sredina hipotenuze AB.

39. Dokazati da periferiski ugao nad prečnikom kružnice nije veći od pravog ugla.

40. Dokazati da je unutrašnjost kružnice konveksna oblast.

Aksiome podudarnosti

Postoji pet aksioma podudarnosti (tri aksiome podudarnosti za duži + dvije aksiome podudarnosti za uglove)

III_1 Za svaku polupravu a' sa početnom tačkom A' i za svaku duž AB, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž AB podudarna sa duži $A'B'$, što zapisujemo ovako $AB \cong A'B'$.

III_2 Ako je $A'B' \cong AB$ i $A''B'' \cong AB$ tada je $A'B' \cong A''B''$.

III_3 Ako je $A-B-C$ i $A'-B'-C'$ i ako je $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$ tada je $AC \cong A'C'$.

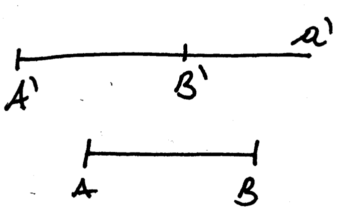
III_4 Za svaku poluravan α' sa ivicom u pravoj p', za svaku polupravu $a' \subseteq p'$ sa početnom tačkom O', za svaki ugao $\sphericalangle ab$, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subseteq \alpha'$ sa početnom tačkom O', takva da je ugao $\sphericalangle ab$ podudaran sa uglom $\sphericalangle a'b'$, što zapisujemo $\sphericalangle ab \cong \sphericalangle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

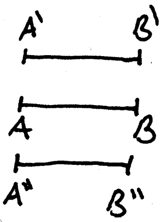
III_5 Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važi da je $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ tada je i $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C'B'A'$.

Skraćeno, aksiome podudarnosti predstavljene slikama:

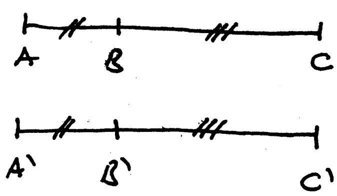
III_1



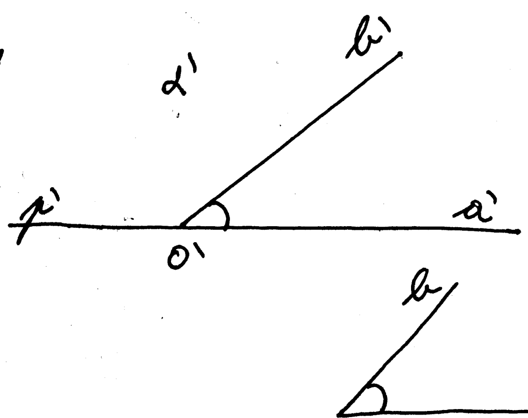
III_2



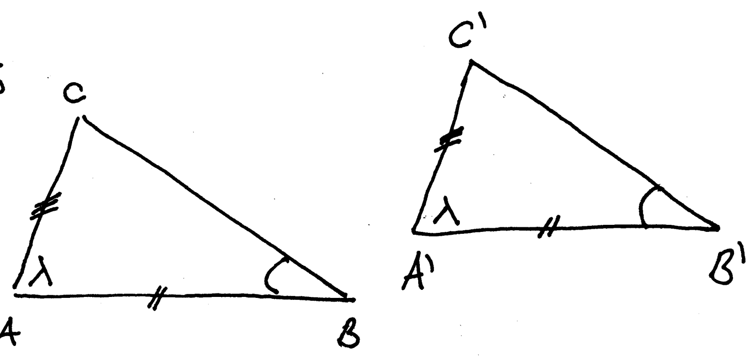
III_3



III_4



III_5



Sljedeće teoreme su dokazane na predavanjima i mi ćemo ih samo navesti.

Teoreme o podudarnosti trouglova:

1. $\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B' \\ AC \cong A'C' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

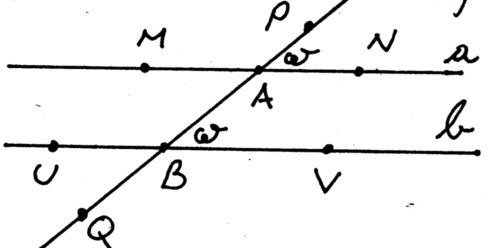
2. $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B' \\ AB \cong A'B' \\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

3. $\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

4. $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B' \\ \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B' \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

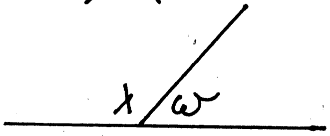
5. $\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \\ AC > BC,\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ugao naspram veće stranice)}]{SSU} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

U nekim zadacima od broja 12 pa nadalje ćemo pretpostaviti da vrijedi sljedeća teorema

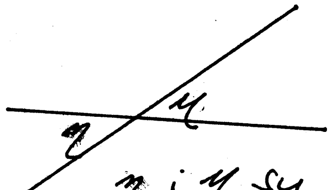


$\sphericalangle PAN = \sphericalangle ABV = \omega \iff a \parallel b$

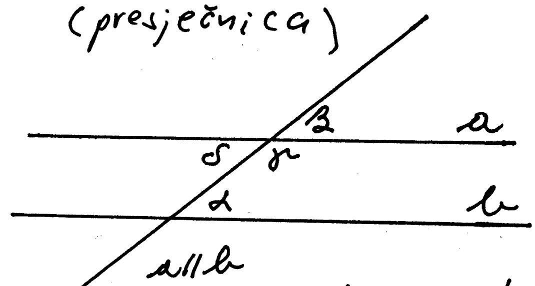
$p(P,Q)$ transferzala (presječnica)



λ i ω su naporedni uglovi



η i μ su unakrsni uglovi



$a \parallel b$

α i β su saglasni uglovi

α i γ su suprotni uglovi

α i δ su naizmjenični uglovi

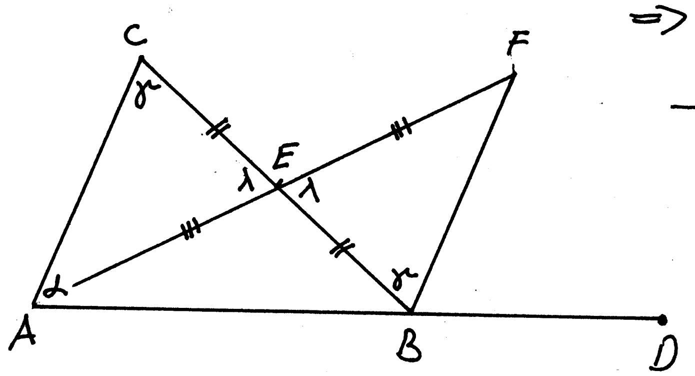
LAMBDA OMEGA ETA MI

(#) Vanjski (spoljašnji) ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Dokazati.

Rj. postavka zadatka

$\triangle ABC$, $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle C = \gamma$, $\measuredangle CBD$ je vanjski ugao trougla (kod vrha B), $A-B-D$

$\Rightarrow$ $\measuredangle CBD > \alpha$ i $\measuredangle CBD > \gamma$.



Označimo sa E sredinu stranice BC.

Neka je $F \in pp[A,E)$ tako da je $A-E-F$ i $AE \cong EF$.

$$\left.\begin{array}{l} AE \cong EF \\ \measuredangle AEC \cong \measuredangle FEB = \lambda \\ \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ CE \cong EB \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AEC \cong \triangle FEB$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ACE \cong \measuredangle EBF = \gamma.$$

Da bi pokazali da je $\measuredangle CBD > \gamma$ trebamo pokazati da $pp[B,F)$ nalazi u unutrašnjosti $\measuredangle CBD$.

$A-B-D \Rightarrow A$ i D se nalaze sa različitih strana prave $p(B,C)$

$A-E-F \Rightarrow A$ i F se nalaz sa različitih strana prave $p(B,C)$

$\Rightarrow$ tačke D i F se nalaze sa iste strane prave $p(B,C)$. ...(*)

$A-E-F \Rightarrow E$ i F se nalaze sa iste strane $p(A,D)$

$B-E-C \Rightarrow E$ i C se nalaze sa iste strane $p(A,D)$

$\Rightarrow$ tačke F i C se nalaze sa iste strane $p(A,D)$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow F$ se nalazi u unutrašnjosti $\measuredangle CBD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle CBF < \measuredangle CBD$ tj. $\measuredangle CBD > \gamma$

q.e.d.

Na sličan način bi pokazali da je $\measuredangle CBD > \alpha$. KAKO?

Prema tome: Vanjski ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla.

q.e.d.

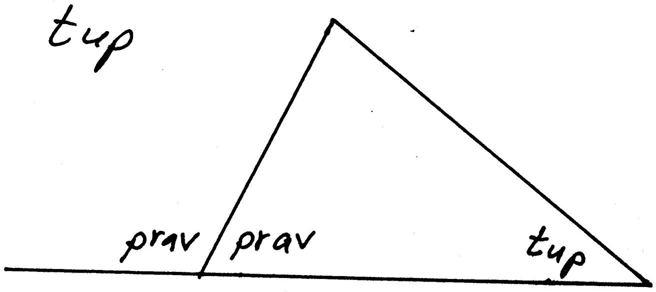
(#) Najviše jedan ugao u trouglu može biti prav ili tup, a najmanje dva su oštra. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

trougao $\Rightarrow$ najviše jedan ugao tup
najmanje dva oštra

Pretpostavimo suprotno tvrdnji. Suprotni slučajevi su

a) dva ugla su prava
b) jedan prav, jedan tup
c) dva ugla su tupa.



Razmotrimo slučaj pod b).

Odaberimo ugao koji je prav. Njegov vanjski ugao je prav.
Ovaj vanjski ugao (prema prethodnom zadatku) je veći od preostala dva unutrašnja ugla u trouglu, odnosno veći je od unutrašnjeg tupog ugla.

#kontradikcija
(prav < tupog)

Slično se dokazuju slučajevi pod a) i c).

Bilo koja pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

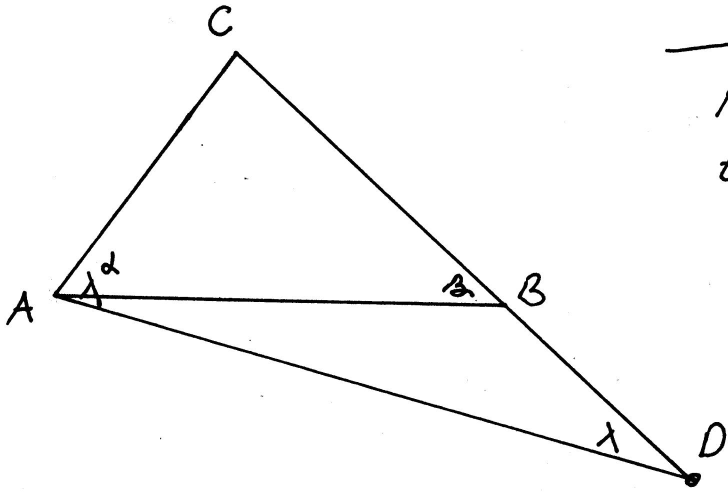
Najmanje jedan ugao u trouglu može biti prav ili tup, a najmanje dva su oštra.

q.e.d.

Nasuprot većeg ugla u trouglu leži veća stranica. Dokazati.

Rj. postavka zadatka

$\triangle ABC$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\alpha > \beta$ $\Rightarrow$ $BC > AC$.



Neka je tačka $D \in pp[C, B)$ tako da je $AC \cong CD$.

Moguća su tri slučaja:

1° $C - B - D$

2° $B \equiv D$

3° $C - D - B$

Ako bi bio prvi slučaj $(C - B - D)$, kako je $AC \cong CD$ to je $\triangle ADC$ jkk pa je $\angle CAD \cong \angle ADC = \lambda$.

$\angle ABC = \beta$ je vanjski ugao $\triangle ADB$ pa je $\beta > \lambda$.

Kako je $\angle CAD > \angle CAB$ to je $\lambda > \alpha$ pa je $\beta > \alpha$

#kontradikcija (sa pretpostavkom da je $\alpha > \beta$)

Prema tome nije prvi slučaj.

Ako bi bio drugi slučaj $(B \equiv D)$ tada bi imali da je $\triangle ABC$ jkk pa bi bilo $\alpha = \beta$

#kontradikcija (sa pretpostavkom da je $\alpha > \beta$)

Prema tome mora vrijediti treći slučaj tj. da je $C - \ \ - B$

pa je $BC > CD = AC$ tj. $BC > AC$

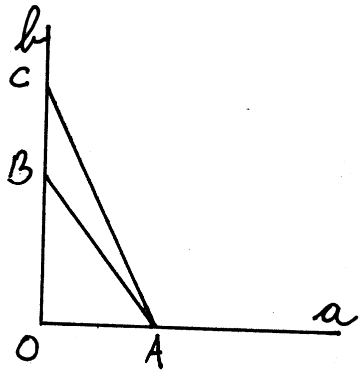
q.e.d.

(7) Neka je $\measuredangle aOb$ prav ugao (a i b su poluprave sa početnom tačkom O) i neka su tačke $A \in a$ i $B, C \in b$. Dokazati da je $OC > OB$ ako i samo ako je $AC > AB$.

Rj: postavka zadatka

potrebah uslov "$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ polupr. sa poč. tač. } O \\ \measuredangle aOb \text{ prav, } A \in a \\ B, C \in b, \quad OC > OB \end{array}\right\} \Rightarrow AC > AB$$



$OC > OB$ to je $O-B-C$

$\measuredangle ABC$ je vanjski ugao $\triangle OAB$ pa je $\measuredangle CBA > \measuredangle AOB =$ prav ugao

$\Rightarrow \measuredangle ABC$ je tup ugao

$\measuredangle ABC$ je najveći ugao u $\triangle ABC$

$\Rightarrow AC > AB$

q.e.d.

---

dovoljan uslov "$\Rightarrow$"

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ poluprave sa poč. tač. } O \\ \measuredangle aOb \text{ prav, } A \in a \\ B, C \in b, \quad AC > AB \end{array}\right\} \Rightarrow OC > OB$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $OC \leq OB$.

Ako bi bilo $OC = OB$ tada $C \equiv B \Rightarrow AC \cong AB$

kontradikcija
($AC > AB$).

Ako bi bilo $OC < OB$ tada na osnovu potrebnog uslova zadatka bi imali $AC < AB$

kontradikcija
(sa pretpostavkom da je $AC > AB$).

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome

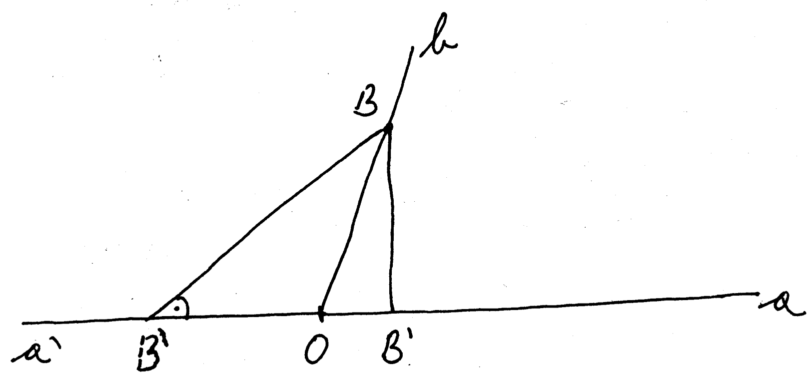
$OC > OB$

q.e.d.

5. Dokazati da ortogonalna projekcija tačke koja pripada jednom kraku oštrog ugla na pravu određenu drugim krakom pripada tom, drugom kraku. Formulisati i dokazati odgovarajuću tvrdnju za tup ugao.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle aOb \text{ oštar ugao} \\ a, b \text{ poluprave} \\ B \in b \\ B' \text{ ortogonalna projekcija tačke } B \end{array}\right\} \Rightarrow B' \in a$$



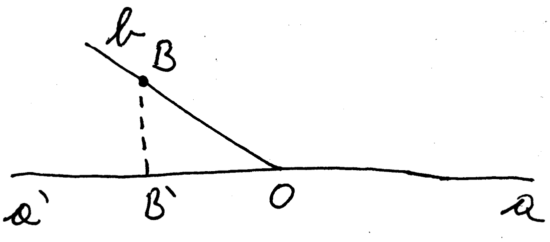
Neka je a' poluprava sa početnom tačkom O koja dopunjuje polupravu a do prave. Pretpostavimo da $B' \in a'$.

Tada je ugao $\measuredangle OB'B$ = prav ugao. Kako je $\measuredangle aOb$ oštar ugao to je $\measuredangle B'OB$ = tup ugao. Dobio sam da u $\triangle B'OB$ postoji jedan tup i jedan prav ugao.

kontradikcija (najviše jedan ugao može biti prav ili tup)

Pretpostavka da $B' \in a'$ nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $B' \notin a' \Rightarrow B' \in a$

q.e.d.



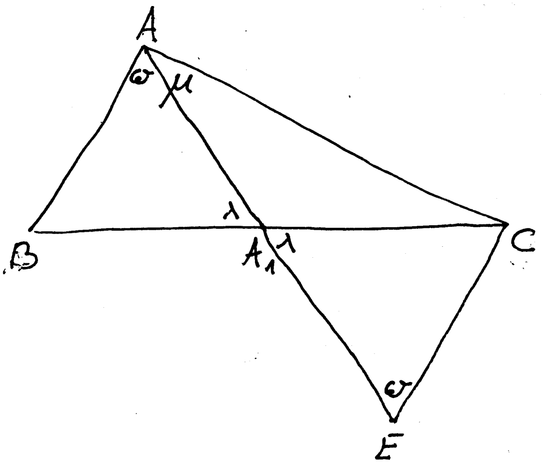
Formulaciju i dokaz odgovarajuće tvrdnje za tup ugao ostavljamo za vježbu.

6. Neka je AA_1 težišna linija $\triangle ABC$. Dokazati da je ugao $\measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$ ako i samo ako je $AB < AC$.

potreban uslov

„$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ AA_1 \text{ težišna linija} \\ \measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AB < AC$$



Kako je AA_1 težišna linija to je $BA_1 \cong CA_1$.

Iz aksioma podudarnosti $\exists E \in pp[A, A_1)$ takva da $AA_1 \cong A_1E$ i $A - A_1 - E$

Sad imam

$$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong CA_1 \\ \measuredangle BA_1A \cong \measuredangle CA_1E \text{ (unakrsni uglovi)} \\ AA_1 \cong EA_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \triangle ABA_1 \cong \triangle A_1EC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle BAA_1 \cong \measuredangle A_1EC = \omega \quad \text{i} \quad AB = EC$$

Prema pretpostavci $\measuredangle A_1AC = \mu < \omega$

pa u trouglu $\triangle AEC$, ugao $\measuredangle AEC > \measuredangle CAE$

$$\Downarrow$$

$$AC > CE \quad \text{tj.} \quad AB < AC$$

q.e.d.

dovoljan uslov

„$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ AA_1 \text{ težišna linija} \\ AB < AC \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. $\measuredangle BAA_1 \leq \measuredangle CAA_1$.

Prema potrebnom uslovu zadatka iz ove činjenice dobijamo:

$$AB \geq AC$$

kontradikcija

(sa pretpostavkom $AB < AC$)

Prema tome mora vrijediti $\measuredangle BAA_1 > \measuredangle CAA_1$ q.e.d.

7. Neka je A_1 sredina stranice BC trougla ΔABC.
Dokazati da vrijedi:

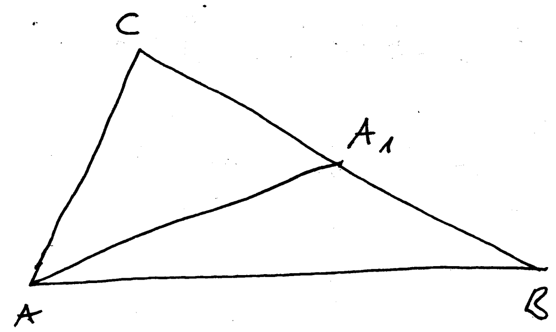
a) $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

b) $AA_1 < \frac{1}{2}(AB + AC)$

c) zbir težišnih linija trougla je veći od poluobima a manji od obima trougla.

Rj.

a) $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ A_1 \text{ sredina stranice } BC\end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 > \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$



Za ΔABA_1 imam:

$$AA_1 + A_1B > AB \quad \ldots(1)$$

Za ΔAA_1C imam

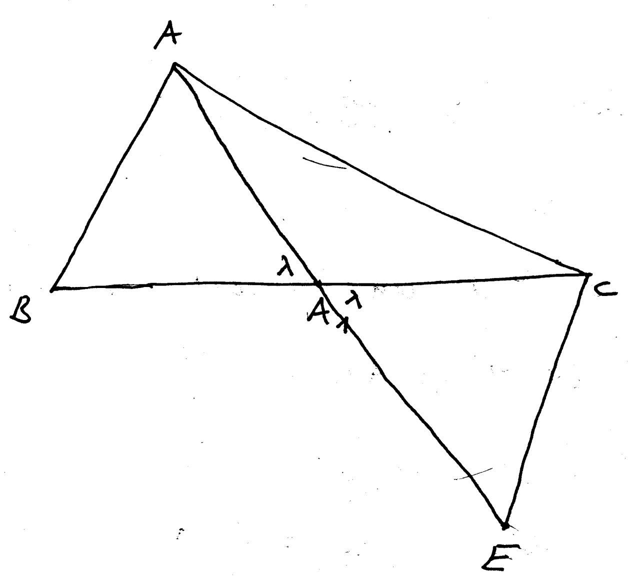
$$AA_1 + A_1C > AC \quad \ldots(2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2AA_1 + BC > AB + AC$$

tj. $AA_1 > \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$

q.e.d.

b) $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ A_1 \text{ sredina stranice } BC\end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 < \frac{1}{2}(AB+AC)$



Iza aksiome podudarnosti:

$\exists E \in pp[A, A_1) : A - A_1 - E$

; $AA_1 \cong A_1E$

Sad imam

$$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong A_1C \\ \sphericalangle BA_1A \cong \sphericalangle CA_1E = \lambda \\ AA_1 \cong A_1E \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ABA_1 \cong \Delta A_1CE$$

$$\Downarrow$$

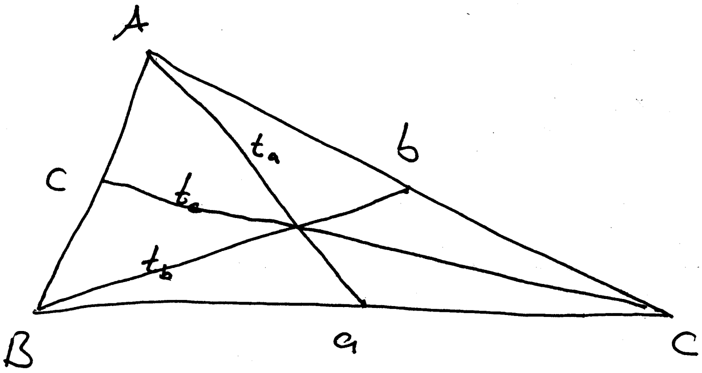
$$AB \cong EC$$

Imam $AE < AC + CE$ tj. $2AA_1 < AC + AB$

$$AA_1 < \frac{1}{2}(AC+AB)$$

q.e.d.

c) $\triangle ABC$
a, b, c stranice $\triangle$
t_a, t_b, t_c težišne linije trougla $\Big\} \Longrightarrow \frac{1}{2} O_{\triangle ABC} < t_a + t_b + t_c < O_{\triangle ABC}$



Iz a) i b) smo dobili

$$\frac{1}{2}(c+b-a) < t_a < \frac{1}{2}(c+b) \quad (*)$$

Na isti način zaključujemo da je

$$\frac{1}{2}(a+c-b) < t_b < \frac{1}{2}(a+c) \quad (**)$$

$$\frac{1}{2}(a+b-c) < t_c < \frac{1}{2}(a+b) \quad (***)$$

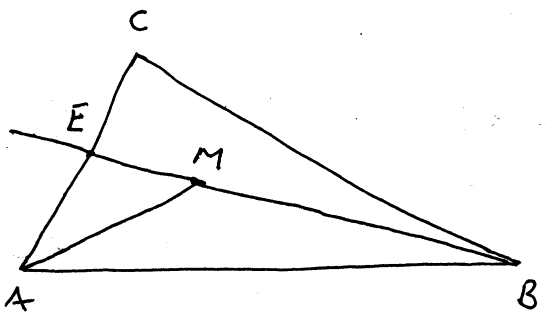
Kad saberemo
$(*) + (**) + (***)$:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a+b+c$$

q.e.d.

8. Neka je M tačka u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$.
Dokazati da vrijedi:
a) $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$
b) $MA + MB < AC + CB$

Rj.
a) $\triangle ABC$
$M \in$ unutrašnjosti $\triangle ABC$ $\Big\} \Rightarrow \measuredangle AMB > \measuredangle ACB$

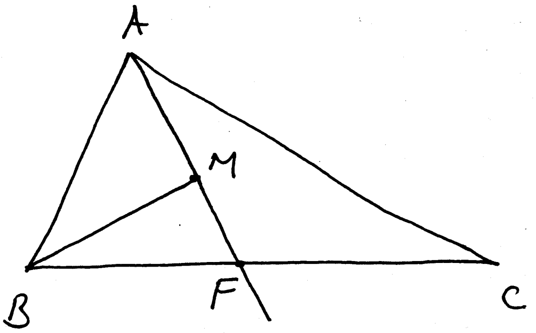


Kako je M u unutrašnjosti $\triangle ABC$ to
$pp[B,M) \cap AC = \{E\}$
$\measuredangle AMB$ je vanjski ugao $\triangle AEM$
pa $\measuredangle AMB > \measuredangle AEM$

$\measuredangle AEM$ je vanjski ugao $\triangle BCE$ pa $\measuredangle AEM > \measuredangle BCE$.
Prema tome $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$

q.e.d.

b) $\triangle ABC$
M u unutrašnjosti $\triangle ABC$ $\Big\}$ $\Longrightarrow$ $MA + MB < AC + CB$



Kako je M u unutrašnjosti $\triangle ABC$
to $p[A, M) \cap BC = \{F\}$.

Za $\triangle AFC$ važi
$$AF < AC + CF \quad \dots (I)$$
Za $\triangle BFM$ važi
$$MB < MF + BF \quad \dots (II)$$

Iz (I) + (II) imamo
$$AM + \cancel{MF} + MB < AC + CF + \cancel{MF} + BF$$
$$MA + MB < AC + CB$$
q. e. d.

II način:
slika je ista

$$AM + MB < AM + BF + FM = AF + BF < AC + FC + BF = AC + BC$$

tj. $AM + MB < AC + BC$
q. e. d.

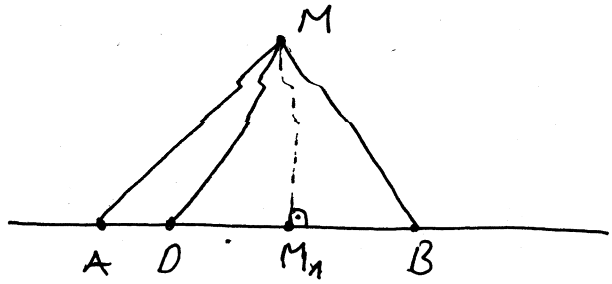
9. Neka je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na pravu određenim tačkama A i B. Dokazati da je $MA \geq MB$ ako i samo ako je $M_1A \geq M_1B$.

Rj. dovoljan uslov „$\Leftarrow$":

A, B, M
$p(A, B)$
M_1 je ortogonalna projekcija tačke M na $p(A, B)$
$M_1A \geq M_1B$

$\Big\} \Longrightarrow MA \geq MB$.

Kako je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na $p(A, B)$ za tačke A, B i M_1 moguć je jedan od sljedeća tri poretka: $A-M_1-B$, M_1-A-B i $A-B-M_1$.
Slučajeve M_1-A-B i $A-B-M_1$ smo razmatrali u zadatku broj 4. tako da se ovdje tim nećemo zamarati.



Znači imamo $A - M_1 - B$

i $AM_1 \geq M_1B$

Razmotrićemo dva slučaja:

1° $M_1A = M_1B$ i

2° $M_1A > M_1B$.

Za $M_1A = M_1B$ bi imali:

$$\left.\begin{array}{l} M_1A \cong M_1B \\ \sphericalangle AM_1M \cong \sphericalangle BM_1M = \text{pravi ugao} \\ MM_1 \cong MM_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta AMM_1 \cong \Delta BMM_1$$

$$\Downarrow$$

$$AM = BM$$

q.e.d.

Ako bi bilo $M_1A > M_1B$ iz aksiome podudarnosti

$\exists D \in pp[M_1, A)$ takvu $M_1 - D - A$ i $M_1D = M_1B$

Sad imam:

$$\left.\begin{array}{l} DM_1 \cong M_1B \\ \sphericalangle DM_1M \cong \sphericalangle BM_1M \\ MM_1 \cong MM_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta DM_1M \cong \Delta BM_1M$$

$$\Downarrow$$

$$MD \cong MB$$

Ugao $\sphericalangle ADM$ je vanjski ugao ΔDM_1M i nije susjedan uglu $\sphericalangle DM_1M$ koji je pravi ugao $\Rightarrow$

$\sphericalangle ADM$ je tup ugao

U ΔADM, ugao $\sphericalangle ADM$ je najveći ugao pa $AM > MD$

tj imamo $MA > MB$

q.e.d.

potreban uslov

" $\Rightarrow$ ":

$$\left.\begin{array}{l} A, B, M \\ p(A, B) \\ M_1 \text{ je ortogonalna projekcija tačke } M \text{ na } p(A,B) \text{ takva da je } A - M_1 - B \\ MA \geq MB \end{array}\right\} \Rightarrow M_1A \geq M_1B$$

— — —

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da je $M_1A < M_1B$. Tada bi prema dovoljnom uslovu ovog zadatka vrijedilo $MA < MB$

#kontradikcija
(sa hipotezom $MA \geqslant MB$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas dovodi do kontradikcije pa nije tačna. Prema tome mora vrijediti

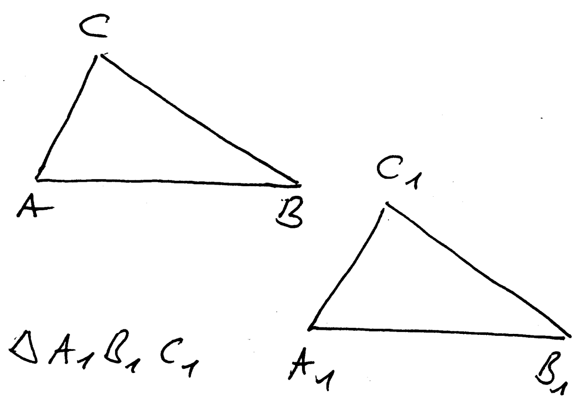
$$M_1A \geqslant M_1B$$

q.e.d.

10. Za trouglove ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ vrijedi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$. Dokazati da je $BC \geqslant B_1C_1$ ako i samo ako je $\measuredangle BAC \geqslant \measuredangle B_1A_1C_1$.

Rj. potreban uslov "$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{aligned} &\Delta ABC \\ &\Delta A_1B_1C_1 \\ &AB \cong A_1B_1 \\ &AC \cong A_1C_1 \\ &BC \geqslant B_1C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \measuredangle BAC \geqslant \measuredangle B_1A_1C_1$$



Ako bi bilo $BC \cong B_1C_1$ imali bi:

$$\left.\begin{aligned} &AB \cong A_1B_1 \\ &AC \cong A_1C_1 \\ &BC \cong B_1C_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{SSS} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

$$\Downarrow$$

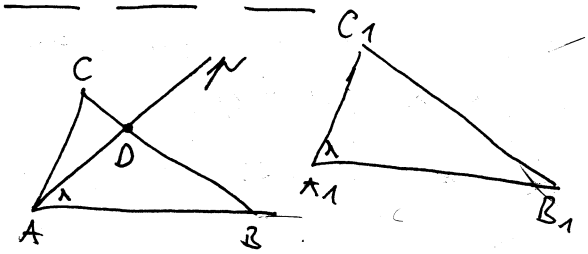
$$\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$$

q.e.d.

Za $BC > B_1C_1$ dokaz je malo komplikovaniji pa ćemo mu se vratiti kasnije.

dovoljan uslov "$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{aligned} &\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1 \\ &AB \cong A_1B_1,\ AC \cong A_1C_1 \\ &\measuredangle BAC \geqslant \measuredangle B_1A_1C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow BC \geqslant B_1C_1$$



Ako bi bilo $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$ imali bi:

$$\left.\begin{aligned} &AC \cong A_1C_1 \\ &\measuredangle BAC \cong \measuredangle B_1A_1C_1 \\ &AB \cong A_1B_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

$$\Downarrow$$

$$BC = B_1C_1$$

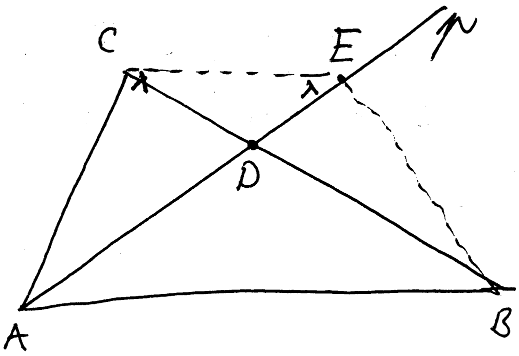
q.e.d.

Pretpostavimo da je $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$. Iz aksiome podudarnosti za $\sphericalangle B_1A_1C_1$ $\exists$ poluprava p : $\sphericalangle BAp \cong \sphericalangle B_1A_1C_1$. $p \cap BC = \{D\}$.
Na polupravoj p $\exists E$: $AE \cong AC$.
Za tačke D i E moguć je jedan od sljedeća tri odnosa:

1° $A-D-E$

2° $D \equiv E$

3° $A-E-D$.



Ako bi važio poredak $A-D-E$, imali bi $AC = AE \Rightarrow$

$\sphericalangle ACE = \sphericalangle AEC = \lambda$.

Posmatram $\triangle CBE$.

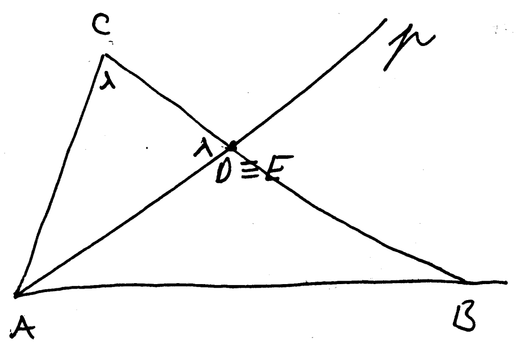
$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE > \sphericalangle DCE$.

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle CED$ pa prema tome:

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle BCE \Rightarrow BC > BE$

tj. $BC > B_1C_1$

q.e.d.

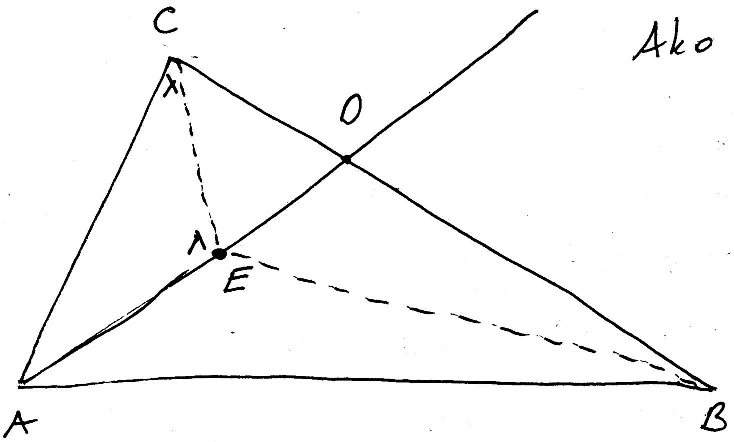


Ako bi vrijedilo $D \equiv E$

iz poretka $B-D-C \Rightarrow BD < BC$

tj. $B_1C_1 < BC$

q.e.d.



Ako bi bilo $A-E-D$

$AE = AC \Rightarrow \sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \lambda$

λ oštar ugao pa kako je $\sphericalangle CED$ vanjski susjedni ugao uglu $\sphericalangle AEC$ to je $\sphericalangle CED$ tup.

Slijedi da je $\sphericalangle ECD$ oštar pa kako je $\sphericalangle CEB > \sphericalangle CED$ to je i $\sphericalangle CEB$ tup ugao. Prema tome

$\sphericalangle CEB > \sphericalangle ECD \implies BC > BE$ tj. $BC > B_1C_1$

q.e.d.

Bez obzira koji od slučajeva za tačke D i E da se dogodi pokazali smo da $BC > B_1C_1$

q.e.d.

Vratimo se na potreban uslov.

„$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{c} \Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1 \\ AB \cong A_1B_1,\ AC \cong A_1C_1 \\ BC > B_1C_1 \end{array}\right\} \implies \sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$$

Ako pretpostavim suprotno tvrdnji tj. da je $\sphericalangle BAC \leq \sphericalangle B_1A_1C_1$ prema dovoljnom uslovu dobiću:

$BC \leq B_1C_1$

kontradikcija sa hipotezom $BC > B_1C_1$)

Prema tome mora vrijediti $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$

q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC je $AB < AC$. Neka su E, D i H redom tačke u kojima simetrala ugla, težišna linija i visina iz tjemena A sijeku pravu BC. Dokazati da vrijedi:

a) $\sphericalangle AEB < \sphericalangle AEC$

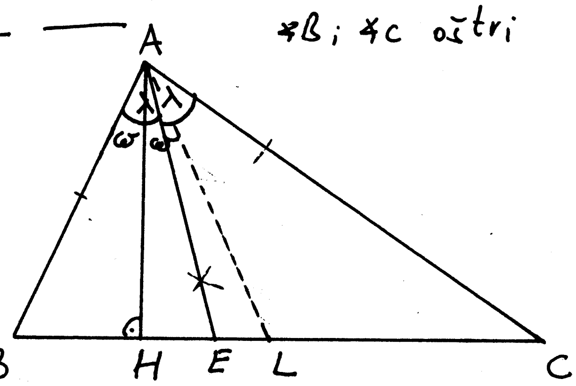
b) $BE < CE$

c) da je poredak $H-E-D$.

Rj. a) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC,\ AB < AC \\ AE \text{ simetrala ugla} \\ AH \text{ visina} \end{array}\right\} \implies \sphericalangle AEB < \sphericalangle AEC$$

$\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ oštri



Kako je $AB < AC$ prema 9 zadatku slijedi da je $BH < HC$.

Pokažimo da je poredak $B-H-E-C$.

Postoji tačka $L \in HC$ takva $H-L-C$ i $HL \cong HB$.

$$\left.\begin{array}{c} BH \cong HL \\ \sphericalangle BHA \cong \sphericalangle LHA = prav \\ AH \cong AH \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle BHA \cong \triangle LHA$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle BAH \cong \sphericalangle LAH = \omega$$

Imamo $2\omega < 2\lambda$ tj. $\omega < \lambda$ $\Rightarrow$ $B-H-E-C$

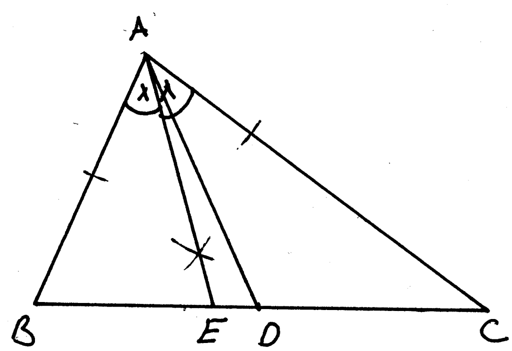
$\triangle AHE$ pravougli $\Rightarrow$ $\sphericalangle AEH = \sphericalangle AEB$ = oštar ugao $\Rightarrow$ $\sphericalangle AEC$ = tup ugao

$\sphericalangle AEC > \sphericalangle AEB$

q.e.d.

b) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ AB<AC,\ \sphericalangle\ ,\sphericalangle C \text{ oštri} \\ AE \text{ simetrala ugla} \\ AD \text{ težišnica} \end{array}\right\} \Rightarrow BE<CE$$



Kako je AD težišnica i $AB<AC$ prema 6 zadatku $\sphericalangle BAD > \sphericalangle DAC$.

Kako $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = \lambda$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle BAD > \lambda = \sphericalangle BAE$

$\Rightarrow$ $B-E-D-C$

D sredina BC $\Rightarrow$ $BE<CE$

q.e.d.

c)
$$\left.\begin{array}{ll} \text{iz a)} & B-H-E-C \\ \text{iz b)} & B-E-D-C \end{array}\right\} \Rightarrow H-E-D$$

q.e.d.

12. Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da trougao bude jednakokraki

a) da su dvije visine podudarne

b) da je jedna simetrala ugla ujedno i težišnica

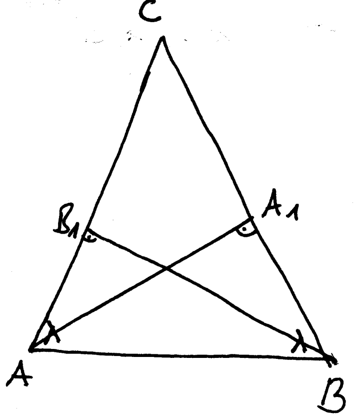
c) da su mu dvije težišne linije podudarne.

Rj. a)

potreban uslov

„ $\Rightarrow$ “ :

$$\left.\begin{array}{c} \triangle ABC \text{ jk} \\ (AC=BC) \\ AA_1,\ BB_1 \text{ visine trougla} \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \cong BB_1$$



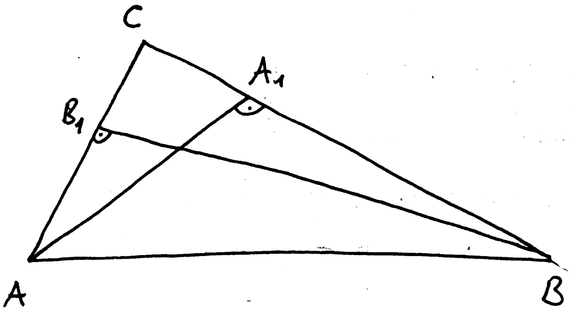
$\triangle ABC$ jkk $\Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle CBA = \lambda$

$$\left.\begin{aligned} &\measuredangle AA_1B \cong \measuredangle BB_1A = \text{prav ugao} \\ &\measuredangle A_1BA \cong \measuredangle B_1AB = \lambda \\ &AB \cong AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle AA_1B \cong \triangle BB_1A \Downarrow AA_1 \cong BB_1$$

q.e.d.

dovoljan uslov „$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{aligned} &\triangle ABC \\ &AA_1, BB_1 \text{ visine trougla} \\ &AA_1 \cong BB_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ jkk}$$



Primetimo da je u $\triangle AA_1B$ i $\triangle BB_1A$ AB najveća stranica. Zašto?

Sad imamo:

$$\left.\begin{aligned} &AB \cong AB \\ &AA_1 \cong BB_1 \\ &\measuredangle AA_1B \cong \measuredangle BB_1A = \text{prav ugao} \\ &AB > AA_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{SSU} \triangle AA_1B \cong \triangle BB_1A$$

(ugao naspram veće stranice)

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABA_1 \cong \measuredangle BAB_1$$

$$\Downarrow$$

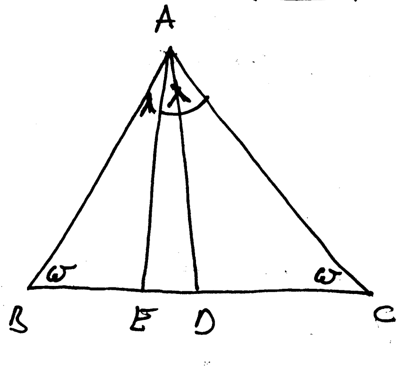
$$AC \cong BC$$

tj. $\triangle ABC$ jkk

q.e.d.

b) potreban uslov „$\Leftarrow$":

$$\left.\begin{aligned} &\triangle ABC \text{ jkk} \\ &(AB \cong AC) \\ &AE \text{ simetrala ugla} \\ &AD \text{ težišnica} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AD \equiv AE \quad (\text{tj. } D \equiv E)$$



Ovaj zadatak mogu uraditi na dva načina, primenjujući teoreme USU i SUS.

$\triangle ABC$ jkk $(AB \cong AC)$ $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle ACB = \omega$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ABC \cong \measuredangle ACB = \varphi \\ AB \cong AC \\ \measuredangle BAE \cong \measuredangle CAE\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle ABE \cong \triangle ACE$$

$$\Downarrow$$

$$BE \cong EC$$

$$\Downarrow$$

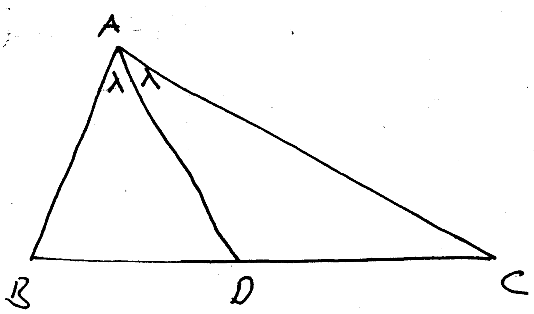
$$E \equiv D \quad (E \text{ sredina } BC$$

$$\Downarrow$$

$$AD \equiv AE \quad \text{q.e.d.}$$

dovoljan uslov „$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \\ AD \text{ je simetrala ugla} \\ \text{i težišnica}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ jkk}$$



$$\left.\begin{array}{l}BD = CD \\ AD = AD \\ \measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ne slijedi ništa}$$

Zašto?

Ako bi bilo $AB < AC$; kako je AD simetrala ugla bi bilo prema prethodnom zadatku (tvrdnja pod b)) bi bilo

$$BD < CD$$

$\#$ kontradikcije

$(BD \cong CD)$

Na isti način,
ako bi $AB > AC$, AD simetrala $\xRightarrow{\text{prethodni zadatak}}$ $BD > CD$

$\#$ kontradikcija

$(BD \cong CD)$

Prema tome, mora vrijediti $AB \cong AC$

tj $\triangle ABC$ jkk

q.e.d.

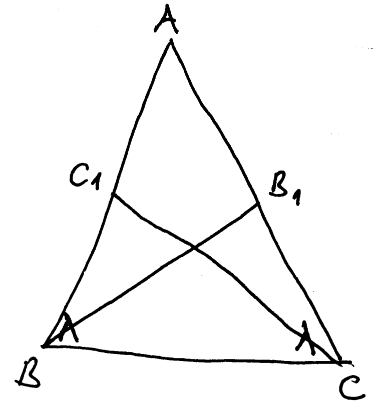
c) potreban uslov

„$\Rightarrow$":

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ jkk} \\ (AB \cong AC) \\ BB_1,\ CC_1 \text{ težišne linije}\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 \cong CC_1$$

$$\underset{(AB = AC)}{\triangle ABC \text{ jkk}} \Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle ACB = \lambda$$

B_1 sredina duži AC, C_1 sredina strane AB



Kako je $AB \cong AC$ to je $BC_1 \cong CB_1$.

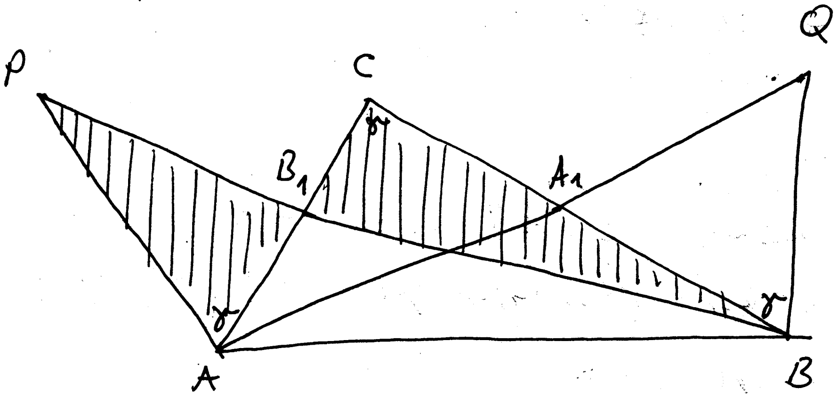
$$\left.\begin{array}{c} BC \cong BC \\ \measuredangle BCB_1 \cong \measuredangle CBC_1 = \lambda \\ CB_1 \cong BC_1 \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle BCB_1 \cong \triangle CBC_1 \Downarrow BB_1 \cong CC_1$$

q.e.d.

dovoljan uslov
" $\Leftarrow$ " :

$$\left.\begin{array}{c} \triangle ABC \\ AA_1, BB_1 \text{ težišne linije} \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \text{ jkk}$$

Na pp$[A, A_1)$ uzmimo tačku Q : $A - A_1 - Q$ i $AA_1 \cong A_1Q$
Na pp$[B, B_1)$ uzmimo tačku P : $B - B_1 - P$ i $BB_1 \cong B_1P$



$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \cong B_1C \\ \measuredangle AB_1P \cong \measuredangle BB_1C \text{ (unakrsni)} \\ PB_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle AB_1P \cong \triangle CB_1B \Downarrow AP \cong BC$$

$$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong A_1C \\ \measuredangle BA_1Q \cong \measuredangle AA_1C \text{ (unakrsni)} \\ AA_1 \cong A_1Q \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle BA_1Q \cong \triangle CA_1A \Downarrow BQ \cong AC$$

Posmatrajmo $\triangle ABP$ i $\triangle ABQ$.
Ako bi bilo $AC < BC$ dobio bi $BQ < AP$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong AB \\ AQ \cong BP \\ BQ < AP \end{array}\right\} \xrightarrow{10.\ \text{zadatak}} \measuredangle BAQ < \measuredangle ABP$$

Sad bi za trouglove $\triangle ABB_1$ i $\triangle ABA_1$ vrijedilo

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong AB \\ BB_1 \cong AA_1 \\ \measuredangle BAA_1 < \measuredangle ABB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{10.\text{ zadatak}} BA_1 < AB_1$$

$$\Downarrow$$

$$BC < AC$$

kontradikcija (sa tvrdnjom da je $AC < BC$).

Na isti način bi došli do kontradikcije ako bi pretpostavili da je $AC > BC$.

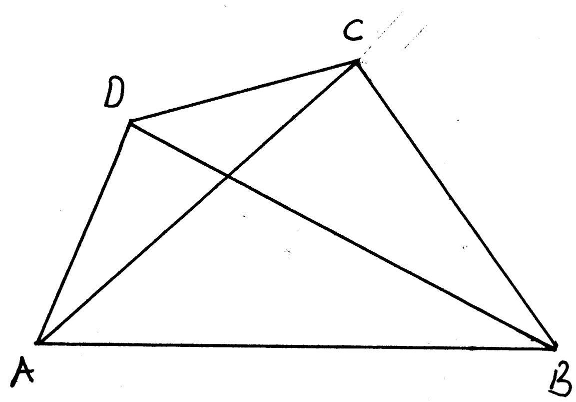
Prema tome mora biti $AC \cong BC$ tj. $\triangle ABC$ jkk

q.e.d.

(#) U konveksnom četverouglu $\square ABCD$, AB je najveća, a CD najmanja stranica. Dokazati da je $\measuredangle D > \measuredangle B$ i $\measuredangle C > \measuredangle A$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konv.} \\ AB \text{ najveća str.} \\ AC \text{ najmanja str.} \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle D > \measuredangle B \quad i \quad \measuredangle C > \measuredangle A$$



$\triangle ABD$, $AB > AD$

$\Rightarrow \measuredangle ADB > \measuredangle ABD \quad \ldots(1)$

$\triangle BCD$, $CD < BC$

$\Rightarrow \measuredangle CDB > \measuredangle DBC \quad \ldots(2)$

$(1)+(2)$:

$$\measuredangle ADB + \measuredangle CDB > \measuredangle ABD + \measuredangle DBC$$

$$\measuredangle CDA > \measuredangle ABC$$

$$\measuredangle D > \measuredangle B$$

q.e.d.

$\triangle ABC$, $AB > BC$

$\measuredangle ACB > \measuredangle CAB \quad \ldots(3)$

$\triangle ACD$, $DC < AD$

$\measuredangle ACD > \measuredangle DAC \quad \ldots(4)$

$(3)+(4)$:

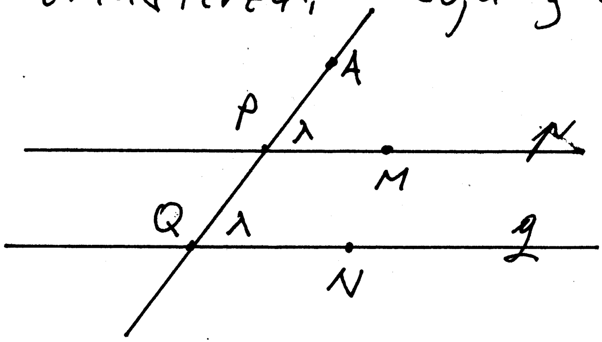
$$\measuredangle ACB + \measuredangle ACD > \measuredangle CAB + \measuredangle DAC$$

$$\measuredangle BCD > \measuredangle DAB$$

$$\measuredangle C > \measuredangle A$$

q.e.d.

Pretpostavimo da je dokazana teorema o uglovima na transferzali, koja glasi:



$\sphericalangle APM \cong \sphericalangle AQN = \lambda$

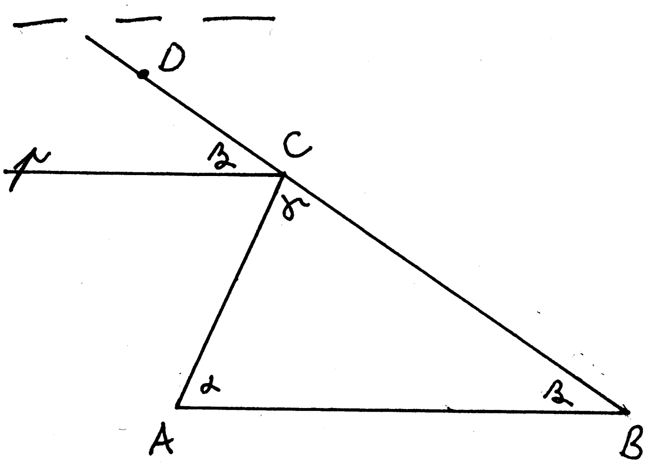
akko $p \parallel g$

Pomoću ove teoreme možemo uraditi zadatak broj 1 i na drugi način:

(#) Vanjski ugao trougla je veći od oba unutrašnja nesusjedna ugla. Zbir uglova u trouglu je ravan ugao. Dokazati.

Rj. ΔABC, $\sphericalangle C'$ vanjski ugao kod vrha C $\Rightarrow$ $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C =$ ravan ugao

$\sphericalangle C' > \sphericalangle A$ i $\sphericalangle C' > \sphericalangle B$



Neka je dat ΔABC.

Za tačke B i C $\exists D: B-C-D$

Uvedimo oznake $\sphericalangle BAC = \alpha$

$\sphericalangle ABC = \beta$

$\sphericalangle BCA = \gamma$

Prema aksiomama podudarnosti postoji poluprava p sa početkom tačkom C i takva $p \subseteq pl[p(B,C), A)$ i $\sphericalangle DCp \cong \sphericalangle ABC = \beta$

$\sphericalangle pCD \cong \sphericalangle ABC = \beta$ i $p(B,D)$ transferzala $\Rightarrow p(A,B) \parallel p$

$p(A,B) \parallel p$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACp = \alpha$

Prema tome $\sphericalangle BCD =$ ravan ugao, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACp + \sphericalangle pCD$

tj. $\alpha + \beta + \gamma =$ ravan ugao

q.e.d.

Ugao $\sphericalangle ACD$ je vanjski ugao trougla kod vrha C. Imamo

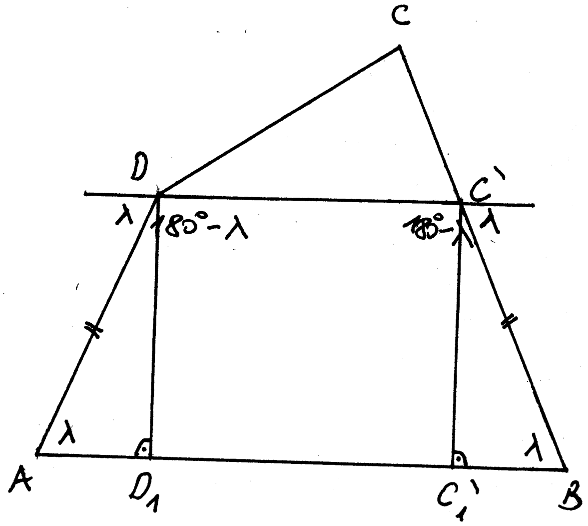
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACp + \sphericalangle pCD = \alpha + \beta \Rightarrow \sphericalangle C' > \sphericalangle A$ i $\sphericalangle C' > \sphericalangle B$

q.e.d.

(#) U konveksnom četverouglu $\square ABCD$ je $\measuredangle A = \measuredangle B$ i $BC > AD$. Dokazati da je $\measuredangle C < \measuredangle D$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konv.} \\ \measuredangle A = \measuredangle B = \lambda \\ BC > AD \end{array}\right\} \Longrightarrow \measuredangle C < \measuredangle D$$



Na stranici BC uzmimo tačku C' tako da je $BC' \cong AD$. Neka su D_1 i C_1' ortogonalne projekcije tački D i C' na pravu $p(A,B)$.

Imamo

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle DD_1A \cong \measuredangle C'C_1'B = 90^\circ \\ \measuredangle DAD_1 \cong \measuredangle C'BC_1' = \lambda \\ AD \cong BC' \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle AD_1D \cong \triangle BC_1'C'$$

$$\Downarrow$$

$$DD_1 \cong C'C_1'$$

Kako je još $DD_1 \parallel C'C_1'$ $\Rightarrow$ $\square D_1C_1'C'D$ je paralelogram $\Rightarrow$ $p(A,B) \parallel p(C',D)$ $\Rightarrow$ $\square ABC'D$ je jkk trapez.

$\measuredangle DC'B$ je vanjski ugao $\triangle DC'C$ pa imamo

$$\measuredangle C = \measuredangle DCC' < \measuredangle DC'B = 180^\circ - \lambda = \measuredangle ADC' < \measuredangle ADC = \measuredangle D$$

tj. $\measuredangle C < \measuredangle D$ q.e.d.

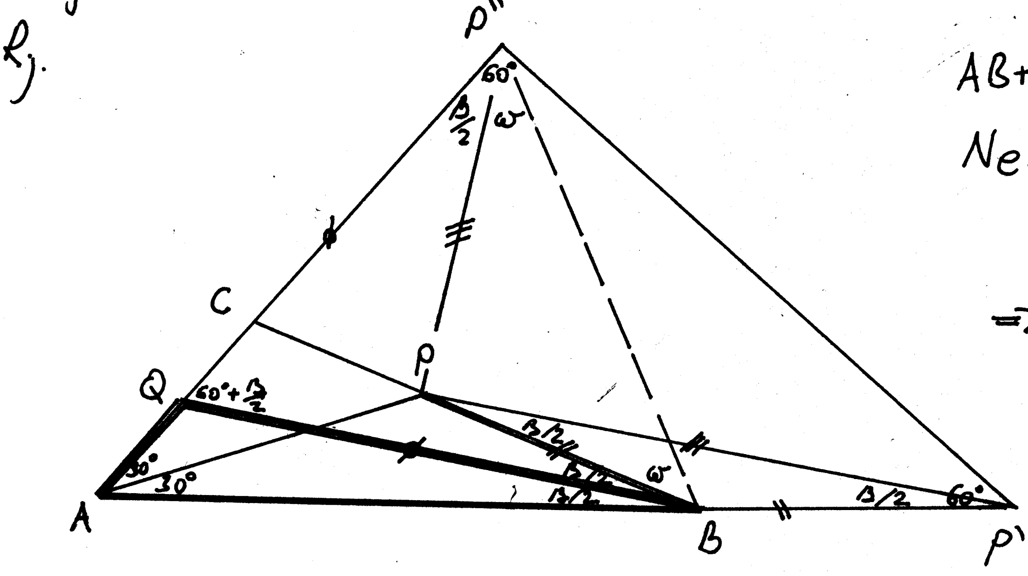
Primjetite da dokaz nije isti u slučaju da smo pretpostavili da je λ tup ugao.

Slučaj $\lambda =$ tup ugao uraditi za vježbu

(uputa: SUS, SSS)

(#) U trouglu ΔABC, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Odrediti ostale uglove u ΔABC.

Rj.



$AB + BP \cong AQ + QB$

Neka je $P' \in p(A,B)$:

$A - B - P'$; $BP \cong BP'$

$\Rightarrow \Delta PBP'$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle BP'P \cong \measuredangle BPP' = \frac{\beta}{2}$

Neka je $P'' \in p[A,C)$: $AP'' \cong AP' \Longrightarrow \Delta AP'P''$ jks ($\measuredangle PAP'' = 60°$)

$$\left.\begin{array}{l} AP'' \cong AP' \\ \measuredangle P''AP = \measuredangle PAP' = 30° \\ AP \cong AP \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta P''AP \cong \Delta P'AP$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AP''P \cong \measuredangle AP'P = \frac{\beta}{2} \quad \wedge \quad PP'' \cong PP'$$

$$AP'' \cong \underline{AQ} + QP'' \cong AB + BP' \cong AB + BP \cong \underline{AQ} + QB \Rightarrow QP'' \cong QB$$

Dokažimo da su tačke B, P, P'' kolinearne tj. $P'' \equiv C$.
Ako tačke B, P i P'' nisu kolinearne imali bi slučaj kao na slici ili bi tačka P bila sa druge strane $p(B,P'')$

Kako je $\Delta QBP''$ jkk ($QB \cong QP''$) i $\measuredangle QBP \cong \measuredangle QP''P \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle PP''B \cong \measuredangle PBP'' = \omega \Rightarrow PP'' \cong PB \overset{(PP'' \cong PP')}{\Longrightarrow} \Delta PBP'$ jks

$\Rightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$ tj $\beta = 120° \Rightarrow \alpha + \beta = 180°$

#kontradikcija
($\alpha + \beta + \gamma = 180°$)

Pretpostavka da tačke B, P i P'' nisu kolinearne nas vodi u kontradikciju pa pretpostavka nije tačna. Prema tome $B - P - P'' \Rightarrow C \equiv P''$.

Sad u ΔQBC imamo $60° + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$

$\gamma'' = \measuredangle PP''A$

$\Rightarrow \beta = 80°$; $\gamma = 40°$.

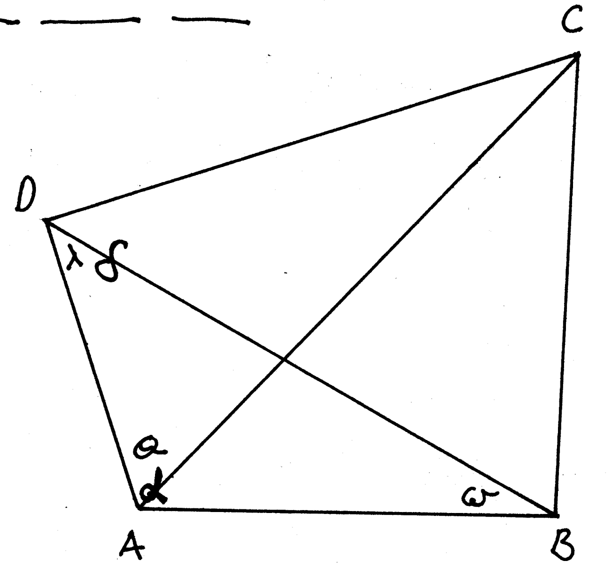
($\alpha = 60°$)

(#) Dokazati da je u svakom konveksnom četverouglu bar jedna stranica manja od veće dijagonale.

Rj.:

$\square ABCD$ konveksan četverougao
AC, BD dijagonale četverougla
$AC < BD$

$\Rightarrow$ bar jedna od stranica AB, BC, CD ili AD je manja od dijagonale BD



Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. da su sve stranice četverougla veće od veće dijagonale četverougla, i dođimo u kontradikciju.

Posmatrajmo $\triangle ABD$, $\alpha < \lambda$ i $\alpha < \omega$ (BD najmanja stranica).

$\alpha = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB$, $\lambda = \measuredangle ADB < \measuredangle ADB + \measuredangle CDB = \measuredangle ADC = \delta$

$\theta = \measuredangle DAC$, kako je $\alpha < \lambda$ to je i $\theta < \delta$

pa u $\triangle DAC$ imamo $DC < AC$.

Iz pretpostavke zadatka $AC < BD \Rightarrow DC < BD$

\# kontradikcija

(pretpostavili smo da su sve stranice $\triangle$ veće od dijagonale BD)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

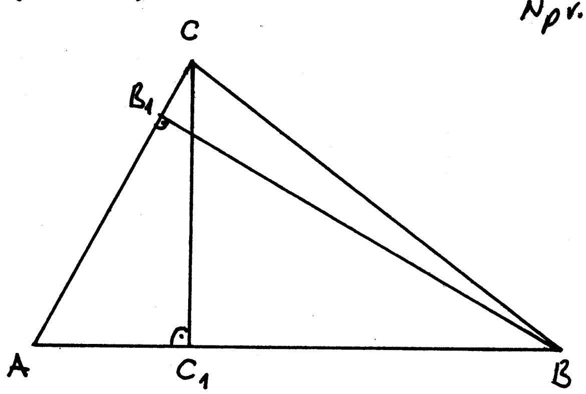
Bar jedna od stranica trougla je manja od veće dijagonale.

q.e.d.

(#) Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

Rj. $\Delta ABC \Rightarrow$ najviše jedna stranica je manja od njoj odgovarajuće visine.

Prije nego što počnemo rješavati zadatak, šta možemo reći o stranici koja je manja od njoj odgovarajuće visine.



Npr. $AB < CC_1$

ΔAC_1C, $\measuredangle AC_1C = 90^\circ \Rightarrow AC > CC_1$

pa kako je $CC_1 > AB \Rightarrow AC > AB$

ΔCC_1B, $\measuredangle CC_1B = 90^\circ \Rightarrow BC > CC_1$

pa kako je $CC_1 > AB \Rightarrow BC > AB$

Stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine je najmanja stranica u trouglu. ... (*)

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoje dvije stranice u trouglu koje su manje od njoj odgovarajuće visine, npr. $AB < CC_1$ i $AC < BB_1$.

$AB < CC_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} AB < AC$ i $AB < BC$

$AC < BB_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} AC < AB$

\# kontradikcija

(već smo pokazali da je $AB < AC$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

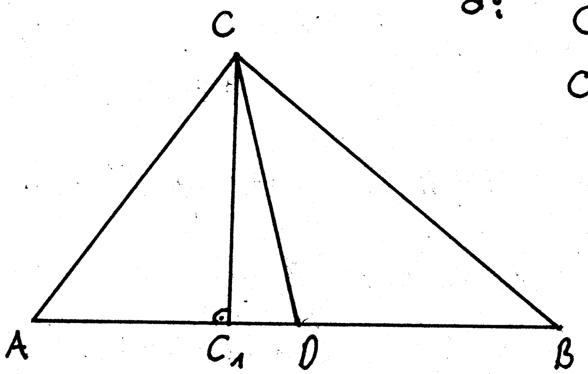
U trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

q.e.d.

(#) Između svih trouglova sa datim zbirom težišnih linija odrediti onaj sa najvećim zbirom visina.

Rj.

U svakom trouglu visina spuštena iz nekog vrha je manja ili jednaka težišnoj liniji spuštenoj iz tog vrha.



d: CC_1 - visina iz vrha C

CD - težišnica iz C

1° $C_1 \equiv D \Rightarrow CC_1 \cong CD$

2° $C_1 \not\equiv D$

U $\triangle CC_1D$, $\measuredangle CC_1D = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CD > CC_1$

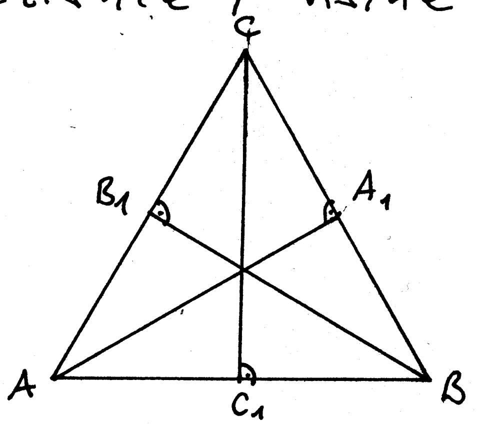
Prema tome $h_a \leq t_a$, $h_b \leq t_b$ i $h_c \leq t_c$

Zbir visina $h_a+h_b+h_c$ je ograničen odozgo zbirom težišnica $t_a+t_b+t_c$.

Najmanja gornja granica za $h_a+h_b+h_c$ je onaj zbir težišnih linija $t_a+t_b+t_c$ za koji vrijedi $h_a+h_b+h_c = t_a+t_b+t_c$

$\Rightarrow h_a = t_a$, $h_b = t_b$ i $h_c = t_c$.

Između svih trouglova sa datim zbirom težišnih linija, najveći zbir visina ima onaj trougao u kome se težišnice i visine poklapaju.



$\overset{SUS}{\Rightarrow} \triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$

$\Downarrow$

$AC \cong BC$

$\overset{SUS}{\Rightarrow} \triangle ABA_1 \cong \triangle ACA_1$

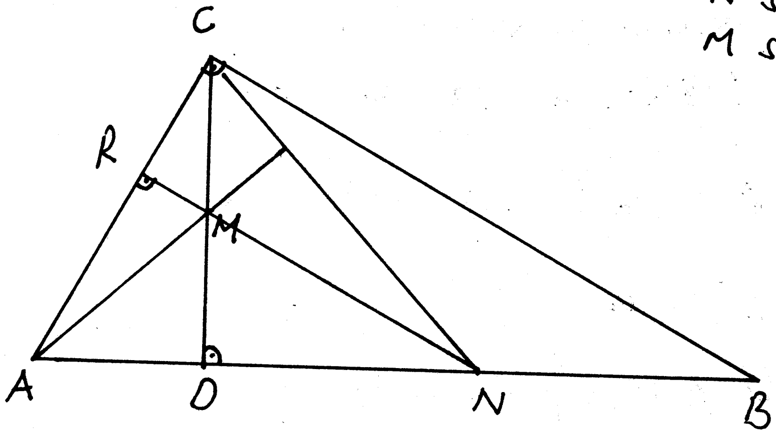
$\Downarrow$

$AB \cong AC$

Riječ je o jednakostraničnom trouglu.

Tačka D je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC, a M i N su redom sredine duži CD i BD. Dokazati da je $p(A,M) \perp p(C,N)$.

Rj.



$\left.\begin{array}{l} N \text{ sredina } BD \\ M \text{ sredina } CD \end{array}\right\} \Rightarrow MN$ srednja linija ΔDBC

$\Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow p(M,N) \perp AC$

($p(M,N) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala)

$p(M,N) \cap AC = \{R\}$

U ΔANC tačka M je presjek visina CD i NR

$\Rightarrow M$ je ortocentar trougla

$\Rightarrow p(A,M) \perp NC$

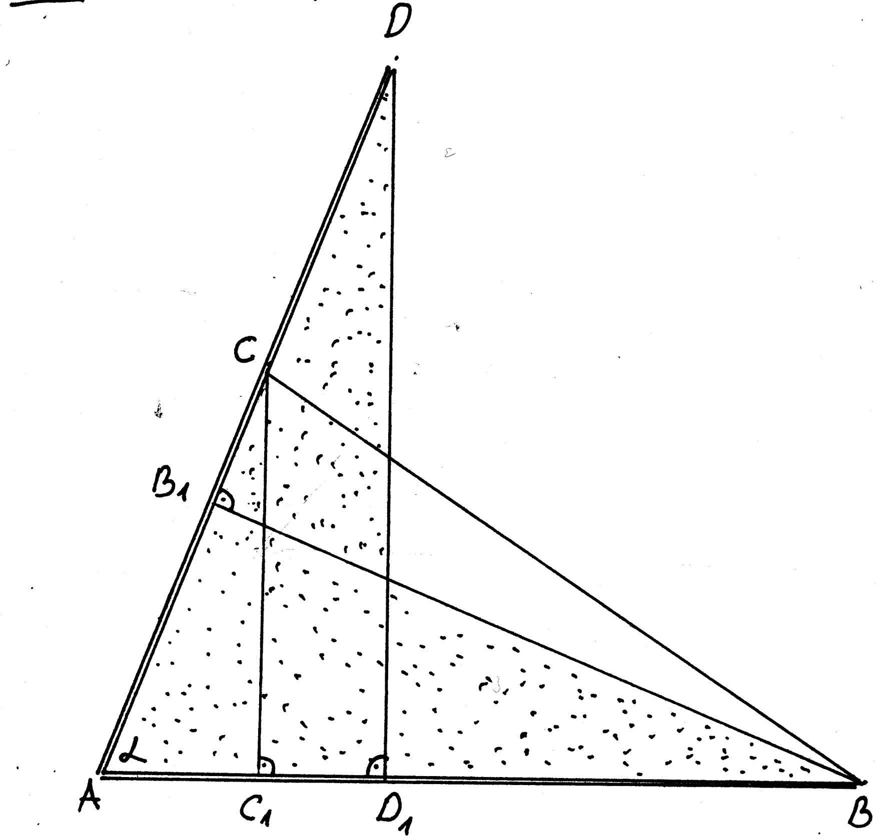
q.e.d.

Dokazati da u trouglu postoji najviše jedna stranica koja je manja od njoj odgovarajuće visine.

Rj. postavka zadatka:

$\Delta ABC \implies$ najviše jedna stranica je manja od njoj odgovarajuće visine.

— — —



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoje dvije stranice koje su manje od njima odgovarajući visina pa dođimo u kontradikciju. Neka su CC_1 i BB_1 visine trougla ΔABC takve da je

$$AB < CC_1$$

i $AC < BB_1$.

Pretpostavimo da je $AC < AB$ (dokaz bi bio isti i da je $AC = AB$ ili $AC > AB$).

Stranicu AC produžimo do tačke D tako da je $AB \cong AD$. Neka je D_1 ortogonalna projekcija tačke D na $p(A,B)$.

Posmatrajmo ΔABB_1 i ΔADD_1

$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle BB_1A \cong \sphericalangle DD_1A = \text{prav ugao} \\ &\sphericalangle BAB_1 \cong \sphericalangle DAD_1 = \alpha \\ &AB \cong AD \end{aligned}\right\} \overset{UUS}{\implies} \Delta ABB_1 \cong \Delta ADD_1 \implies DD_1 \cong BB_1$$

Kako je poredak $A-C-D \implies DD_1 > CC_1$

Sad imamo $AB < CC_1 < DD_1 \cong BB_1$ tj. $AB < BB_1$ # kontradikciji (u ΔABB_1 stranica AB je najveća)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome najviše jedna stranica je manja od njoj odgovarajuće visine

q.e.d.